MATHEMATIQUES

LA REDACTION ET LA PRESENTATION SONT PRISES EN COMPTE POUR 4 POINTS.

LES CALCULATRICES SONT AUTORISEES.

DUREE : 2 HEURES.

31 DN 120

22

ACTIVITES NUMERIQUES

Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explications. Le barème en tiendra compte.

Exercice 1

1) Ecrire A sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers naturels, b étant le plus petit possible :

$$A = 2\sqrt{45} - 3\sqrt{5} + \sqrt{20}.$$

2) Calculer l'expression suivante B et donner son écriture scientifique :

$$B = \frac{150 \times 10^3 \times 8 \times 10^5}{6 \times 10^7}.$$

Exercice 2

On considère l'expression $C = (2x + 5)^2 - (x + 3)(2x + 5)$.

1) Développer et réduire C.
2) Factoriser C.
3) Résoudre l'équation $(2x + 5)(x + 2) = 0$.
4) Calculer l'expression C pour $x = -\frac{2}{3}$. (on mettra le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)

Exercice 3

1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}.$$

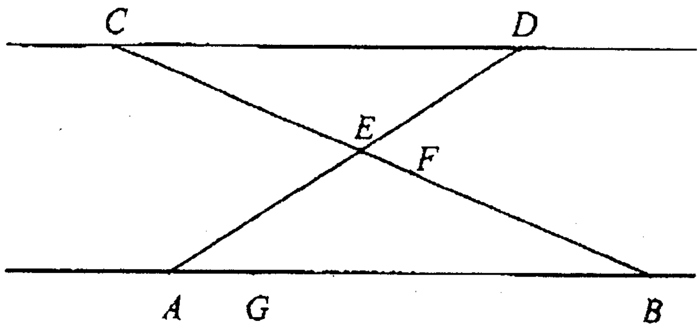
2) Lors d'un spectacle, la famille A, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros.
Pour le même spectacle, la famille B, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros.
Combien paiera la famille C, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants ?

23

ACTIVITES GEOMETRIQUES

Exercice 1

L'unité est le centimètre.
Dans la figure ci-dessous, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Les droites (AD) et (BC) se coupent en E.
On donne $DE = 6$, $AE = 10$, $AB = 20$ et $BE = 16$.

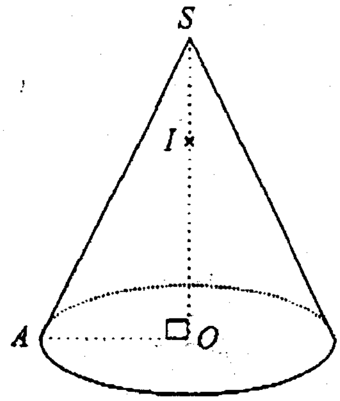


Les deux figures de cette page ne sont pas réalisées en vraie grandeur. Elles ne sont pas à reproduire.

1) Calculer la distance CD.
2) Les points F et G appartiennent respectivement aux segments $[BC]$ et $[AB]$.
   Ils vérifient : $BF = 12{,}8$ et $BG = 16$. Montrer que les droites (FG) et (AE) sont parallèles.

Exercice 2

On considère le cône ci-contre de sommet S et dont la base est le disque de rayon [OA].
Ce cône a pour hauteur $SO = 8$ cm et pour génératrice $SA = 10$ cm.
I est un point du segment $[SO]$ tel que $SI = 2$ cm.



1) Montrer que $OA = 6$ cm.
2) Montrer que la valeur exacte du volume V du cône est égale à 96π cm^3. Donner la valeur arrondie au mm^3 près.
3) Déterminer, au degré près, la mesure de l'angle $\widehat{ASO}$.
4) On coupe ce cône par un plan parallèle à sa base et passant par le point I. La section obtenue est un disque de centre I, réduction du disque de base.
   a) Déterminer le rapport k de cette réduction.
   b) Soit V' le volume du cône de sommet S et de base le disque de centre I. Exprimer V' en fonction de V, puis donner la valeur arrondie de V' au mm^3 près.

Exercice 3

Sur la figure de la feuille annexe (à rendre avec la copie), sont représentés 8 hexagones réguliers. Les constructions demandées dans cet exercice doivent être effectuées directement sur cette feuille annexe.

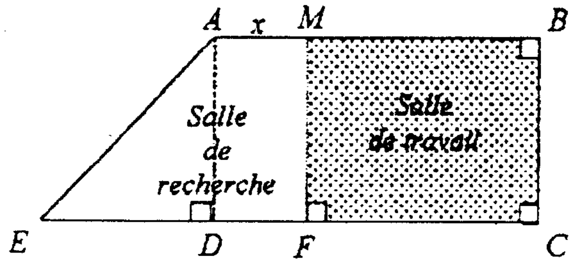
1) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2) Construire le point Q, symétrique de H par rapport à la droite (BE).
3) Construire le point P, image du point C par la rotation de centre E et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.

24

PROBLEME

Les parties 1 et 2 sont indépendantes

La figure ci-dessous est une vue de la surface au sol du C.D.I. d'un collège. Ce C.D.I. doit être réaménagé en deux parties distinctes : une salle de recherche et une salle de travail.
$ABCE$ est un trapèze rectangle tel que $AB = 9$ m, $BC = 8$ m et $DE = 6$ m.
M est un point du segment $[AB]$.
On pose $AM = x$
(x est une distance exprimée en mètre : $0 \leq x \leq 9$).



Rappel :

l'aire d'un trapèze de hauteur h, de bases b et B, est donnée par $a = \frac{h(b+B)}{2}$.

PARTIE 1 :

La documentaliste souhaite que l'aire de la salle de travail soit égale à celle de la salle de recherche.

1) **Dans cette question, uniquement,** on suppose : $x = 1$. Calculer l'aire du trapèze $AMFE$ (salle de recherche), et l'aire du rectangle $MBCF$ (salle de travail).

2) a) Exprimer, en fonction de x, l'aire du trapèze $AMFE$.
   b) Exprimer, en fonction de x, l'aire du rectangle $MBCF$.

3) On se propose de représenter graphiquement cette situation à l'aide de deux fonctions affines f et g.
   f est définie par : $f(x) = -8x + 72$,
   g est définie par : $g(x) = 8x + 24$.
   Sur la feuille de papier millimétrée, construire un repère orthogonal :
   - l'origine sera placée en bas à gauche,
   - en abscisse, on prendra 2 cm pour 1 unité (2 cm pour 1 m),
   - en ordonnée, on prendra 1 cm pour 4 unités (1 cm pour 4 m²).

   Représenter les fonctions affines f et g, pour $0 \leq x \leq 9$.

4) a) En utilisant le graphique, indiquer la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$, ainsi que l'aire correspondante. Mettre en évidence ces valeurs sur le graphique (pointillés, couleurs…).
   b) Retrouver les résultats précédents par le calcul.

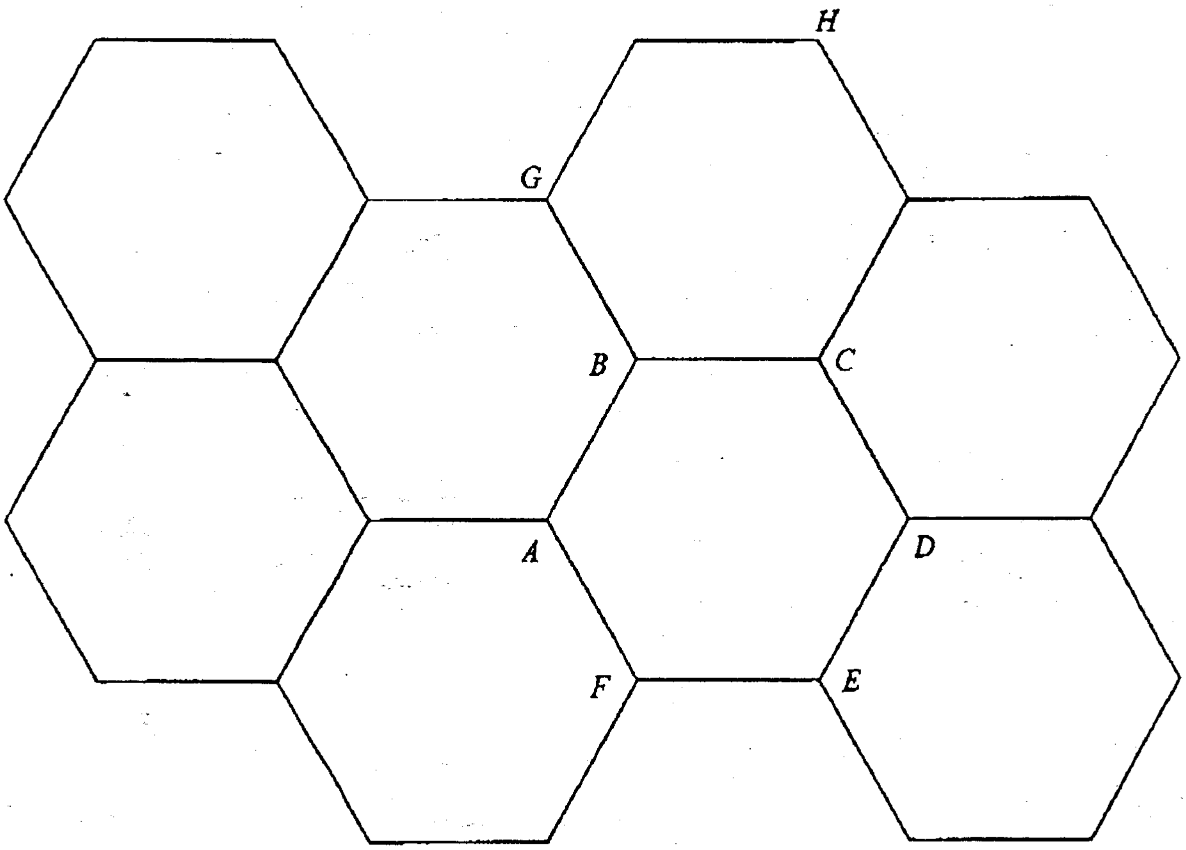
PARTIE 2 :

Dans cette partie, on pose $x = 3,5$.
1) Donner, **en cm**, les dimensions de la salle de travail $MBCF$.
2) On souhaite recouvrir le sol de la salle de travail à l'aide ***d'un nombre entier*** de dalles carrées identiques, de côté c entier le plus grand possible.
   a) Expliquer pourquoi c est le PGCD de 800 et 550.
   b) Calculer la valeur de c, en indiquant la méthode utilisée.
   c) Combien de dalles sont nécessaires pour recouvrir le sol de la salle de travail ?
3) Les dalles coûtent 13,50 € le mètre carré.
   Quelle somme devra-t-on payer pour acheter le nombre de dalles nécessaire ?

25

Feuille annexe à rendre obligatoirement avec la copie

Activités géométriques – Exercice 3



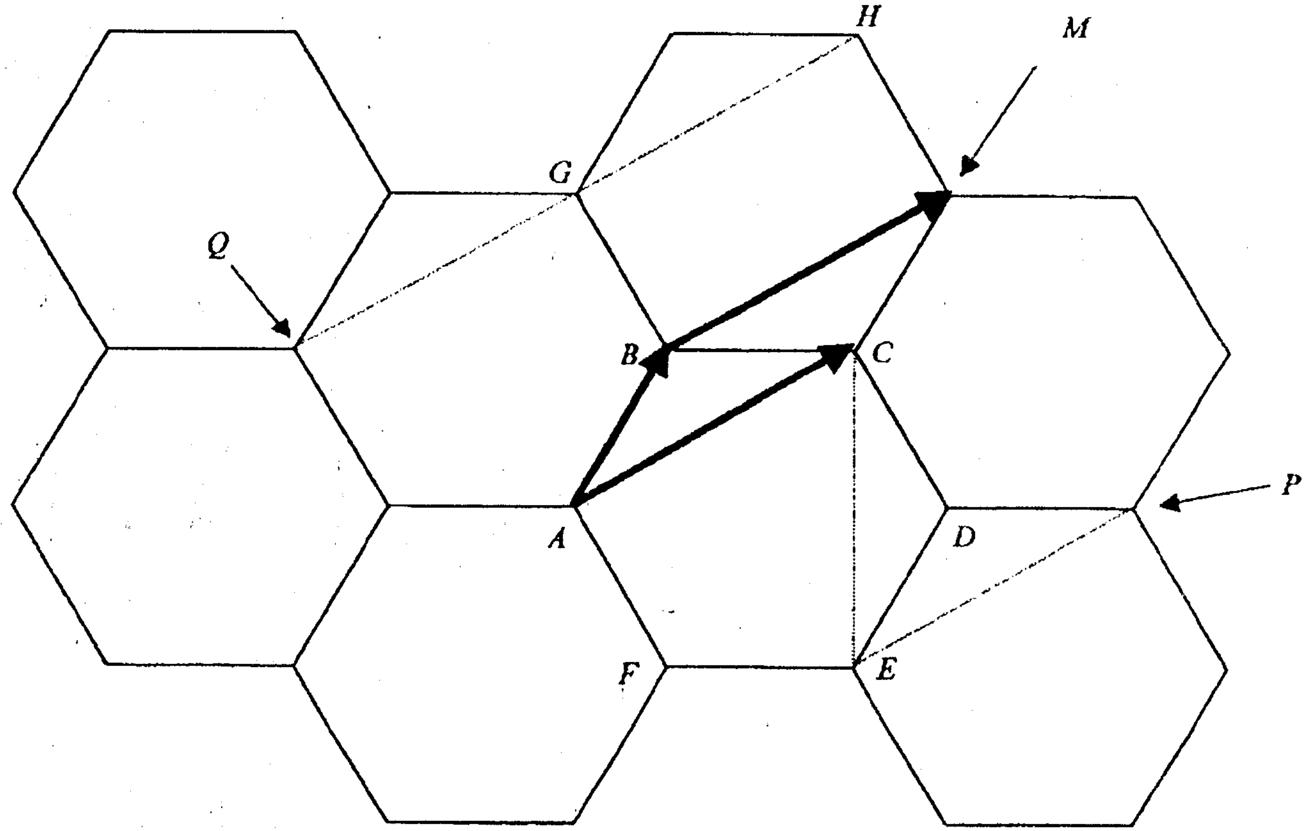
26

Exercice	Question	CORRIGE DU SUJET E SESSION 2003	Barème
Activités Numériques			
Exercice 1	1)	$A = 2\times3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.	1
	2)	$B = \dfrac{3\times50\times2\times4\times10^8}{3\times2\times10^7} = 200\times10^1 = 2000$ (valeur exacte). $B = 2\times10^3$ (écriture scientifique).	1 0,5
Exercice 2	1)	$C = \left(4x^2+20x+25\right)-\left(2x^2+5x+6x+15\right) = 2x^2+9x+10$.	1,5
	2)	$D = (2x+5)\left[(2x+5)-(x+3)\right] = (2x+5)(x+2)$.	1,5
	3)	Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, on a : $(2x+5)(x+2)=0 \Leftrightarrow 2x+5=0$ ou $x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$ ou $x=-2$. Les solutions cherchées sont donc : $x=-\dfrac{5}{2}$, $x=-2$.	1,5
	4)	Pour $x=-\dfrac{2}{3}$, $C = 2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+9\times\dfrac{-2}{3}+10=\dfrac{8}{9}-6+10=\dfrac{44}{9}$.	1
Exercice 3	1)	$\begin{cases}4x+3y=206\\2x+2y=114\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{206-4x}{3}\\y=57-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{206-4x}{3}=57-x\\y=57-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}206-4x=171-3x\\y=57-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=35\\y=22\end{cases}$.	3
	2)	En posant x le prix d'entrée pour un adulte et y celui d'un enfant, la famille A paie $4x+3y$, la famille B paie $2x+2y$. On est ramené à chercher x et y en écrivant le système précédent. On a donc : $x = 35$ euros et $y = 22$ euros. La famille C paiera : $3\times35+2\times22=149$ euros.	1
Activités géométriques			
Exercice 1	1)	On peut utiliser le théorème de Thalès pour la configuration constituée du triangle EAB, de C appartenant à la droite (BE), de D appartenant à la droite (AE), des droites parallèles (AB) et (CD). On peut donc écrire : $\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{CD}{BA}$ d'où : $CD = BA\times\dfrac{ED}{EA}=20\times\dfrac{6}{10}=12$ cm.	1
	2)	Utilisons la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle BEA. Les points B, F, E d'une part, B, G, A d'autre part sont alignés dans le même ordre et on a : $\dfrac{BF}{BE}=\dfrac{12,8}{16}=0,8$ et $\dfrac{BG}{BA}=\dfrac{16}{20}=0,8$. On a donc $\dfrac{BF}{BE}=\dfrac{BG}{BA}$. Les droites (FG) et (AE) sont donc parallèles.	1 1

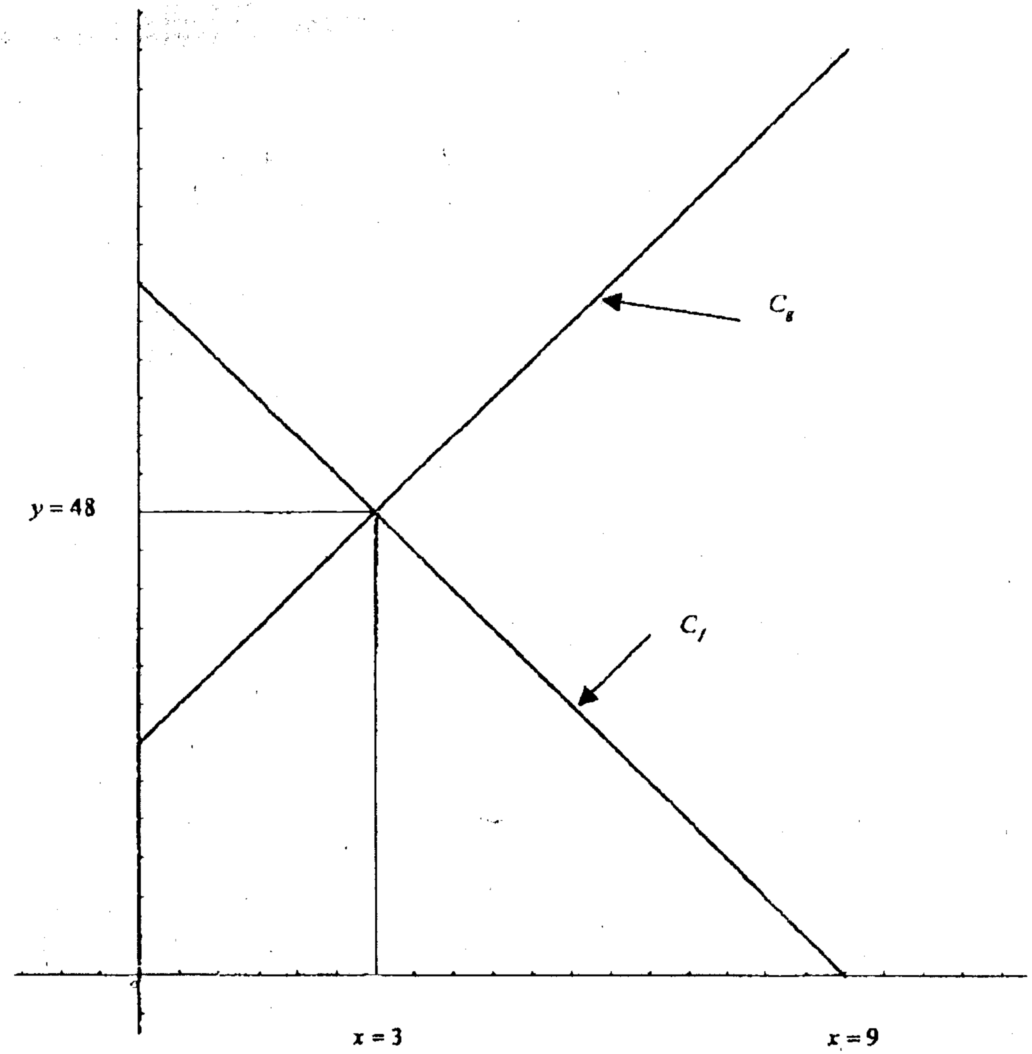
Exercice 2	1)	Utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle AOS, rectangle en O. $AO=\sqrt{AS^2-SO^2}=\sqrt{100-64}=6$: $AO=6$ cm.	1
	2)	En notant $\mathscr{B}$ la surface de la base et h la hauteur du cône, on a : $V=\frac{1}{3}\mathscr{B}\times h=\frac{1}{3}\pi\times 6^2\times 8=96\pi\ \text{cm}^3$. En arrondissant au mm^3, on trouve $V=301{,}593\ \text{cm}^3$.	1
	3)	Dans le triangle rectangle SOA, on peut écrire : $\cos\left(\widehat{ASO}\right)=\frac{SO}{SA}=0{,}8$ donc $\widehat{ASO}=37°$, en arrondissant au degré près.	1
	4)a)	$k=\frac{SI}{SO}=0{,}25$.	0,5
	4)b)	$V'=\left(\frac{1}{4}\right)^3\times V=\frac{96\pi}{64}\ \text{cm}^3=\frac{3\pi}{2}\ \text{cm}^3$. On trouve $V'=4{,}712\ \text{cm}^3$ en arrondissant au mm^3 près.	1
Exercice 3	1)	Construction demandée	1,5
	2)	Construction demandée	1,5
	3)	Construction demandée	1,5

Feuille annexe à rendre obligatoirement avec la copie

Activités géométriques – Exercice 3



Problème			
Partie 1	1)	$\mathcal{A}(AMFE)=\frac{1}{2}\times MF\times(AM+EF)=\frac{8(2x+6)}{2}=32\text{ cm}^2$ lorsque $x=1$. $\mathcal{A}(MBCF)=MB\times BC=8(9-x)=64\text{ m}^2$ lorsque $x=1$.	1
	2)a)	$\mathcal{A}(AMFE)=\frac{1}{2}\times MF\times(AM+EF)=\frac{8(2x+6)}{2}=8x+24$. (à l'unité de surface près)	1
	2)b)	$\mathcal{A}(MBCF)=MB\times BC=8(9-x)=72-8x$. (à l'unité de surface près)	1
	3)	Constructions ci-dessous.	2
	4)a)	La valeur de x associée à l'égalité $f(x)=g(x)$ correspond à l'abscisse du point commun aux deux courbes (C_f) et (C_g).	1
	4)b)	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow -8x+72=8x+24\Leftrightarrow 16x=48\Leftrightarrow x=3$. Pour $x=3$, $f(3)=g(3)=48$. Pour $x=3$, les deux pièces ont une surface identique : 48 m^2.	1
Partie 2	1)	Pour $x=3{,}5$ m, les dimensions de la pièce $MBCF$ sont respectivement : $MB=550$ cm et $BC=800$ cm.	0,5
	2)a)	On doit avoir : $550=c\times k$, avec k entier naturel non nul. $800=c\times k'$ avec k' entier naturel non nul. Cela signifie déjà que c est un diviseur commun à 550 et à 800. Comme c doit être le plus grand possible, c est en fait le PGCD de 800 et de 550.	1
	2)b)	Avec l'algorithme d'Euclide : $800=550\times1+250$ $550=250\times2+50$: le dernier reste non nul dans la suite de ces divisions euclidiennes étant 50, PGCD(800 , 550) = 50. $250=50\times5+0$	1,5
	2)c)	Le nombre de dalles cherché est le produit $k\times k'$ avec $550=c\times k$ et $800=c\times k'$. On trouve : $k=11$, $k'=16$, Le nombre ce dalles cherché est donc : 176.	1
	3)	La surface qui correspond aux 176 dalles achetées est : $50^2\times176=440\,000\text{ cm}^2=44\text{ m}^2$. La facture s'élèvera donc à : $44\times13{,}5=594$ euros.	1



78