

FICHE D'ACTIVITE 2 : ALGORITHME D'EUCLIDE

Le PGCD de deux nombres a et b ($a > b$) est toujours égal au PGCD de b et $(a - b)$.

On peut même aller jusqu'à remarquer que « *le PGCD de deux nombres a et b ($a > b$) est toujours égal au PGCD de b et r (r est le reste de la division euclidienne de a par b).* »

D'où la formule **PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)**.

ACTIVITE 1 - ALGORITHME D'EUCLIDE.

Notre objectif est de déterminer le PGCD de 1 053 et 325.

1^{ERE} ETAPE : $1\ 053 : 325 = 3,24$ $1\ 053 - 325 \times 3 = 78$	a = 1 053 Donc le quotient est 3. Donc le reste est : r = 78. PGCD(1 053 ; 325) = PGCD(325 ; 78)	b = 325
2^{EME} ETAPE : $325 : 78 \approx 4,166666\dots$ $325 - 78 \times 4 = 13$	a = 325 Donc le quotient est 4. Donc le reste est : r = 13. PGCD(325 ; 78) = PGCD (78 ; 13)	b = 78
3^{EME} ETAPE : $78 : 13 = 6$ $78 - 13 \times 6 = 0$	a = 78 Donc le quotient est 6. Ce quotient est EXACT. Donc le reste est 0. Donc 78 est un multiple de 13. Donc 13 est le plus grand diviseur commun (PGCD) de 78 et 13. PGCD (78 ; 13) = 13	b = 13

Conclusion : $\text{PGCD}(1\ 053 ; 325) = \text{PGCD}(325 ; 78) = \text{PGCD}(78 ; 13) = 13$

Cette suite d'opérations s'appelle **Algorithme d'Euclide** et permet de retrouver le PGCD de deux « grands » nombres en se ramenant à des nombres plus petits. Le PGCD est toujours le **dernier reste non nul trouvé.**

→ On présente ces résultats sous forme d'un tableau :

Étapes	a	b	r
1	1 053	325	78
2	325	78	<u>13</u>
3	78	13	0
$a = bq + r$			
$1\ 053 = 325 \times 3 + 78$ (1 ^{ERE} ETAPE)			
$325 = 78 \times 4 + 13$ (2 ^{EME} ETAPE)			
$78 = 13 \times 6 + 0$ (3 ^{EME} ETAPE)			

→ Déterminer le PGCD de 530 et 336 en utilisant ce tableau :

Étapes	a	b	r	$a = bq + r$
1	530	336	194	$530 = 336 \times 1 + 194$
2				$\dots = \dots \times \dots + \dots$
3				$\dots = \dots \times \dots + \dots$
4				$\dots = \dots \times \dots + \dots$
5				$\dots = \dots \times \dots + \dots$
6				$\dots = \dots \times \dots + \dots$
7				$\dots = \dots \times \dots + \dots$
8				$\dots = \dots \times \dots + \dots$
9				$\dots = \dots \times \dots + \dots$