CHAPITRE 7 : LES RACINES CARREES

Fiche d'activité

1. Racine carrée d'un nombre :

Définition :
Soit a un nombre positif.
La **racine carrée de a** (notée $\sqrt{a}$) est le nombre positif dont le carré est a.
C'est-à-dire :
Pour tout nombre a positif, on peut écrire : $(\sqrt{a})^2 = a$ ou encore $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

Propriété :
Pour tout nombre a positif, on peut écrire $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples :
D'après la définition, $(\sqrt{2})^2 = 2$ ou encore $\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2$.
Avec la calculatrice, on a : $\sqrt{2} \approx 1{,}414\ 213\ 562\ldots$

valeur exacte valeur approchée

D'après la propriété, $\sqrt{2^2} = 2$

Remarque :
Puisqu'un carré est toujours positif, **un nombre négatif n'a pas de racine carrée**.

Exercices n°1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 page 58

2. Calculs avec les racines carrées :

Propriété :
Soient a et b deux nombres positifs. Alors :

$\sqrt{a\times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (ici b est non nul)

Démonstration :
Soient a et b deux nombres positifs.
D'une part :
$(\sqrt{a\times b})^2 = a\times b$ parce que c'est la définition de la racine carrée.
D'autre part :
$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}\times\sqrt{b} \times \sqrt{a}\times\sqrt{b}$ parce que c'est la définition du carré
$= \sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b}$ car on peut changer l'ordre dans un produit
$= (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2$
$= a \times b$ d'après la définition de la racine carrée
Alors $(\sqrt{a\times b})^2 = (\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2$.
De plus, $\sqrt{a\times b}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ sont positifs donc on peut aussi dire que $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

Applications :

a) Simplifier une racine carrée :
$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (on fait apparaître un carré parfait, puis on le sort du radical)
b) Calcul :
$\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 20} = \sqrt{100} = 10$
c) Ne pas avoir de racine carrée au dénominateur :
$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Fiche 1 (simplifier une racine carrée)
Fiche 2 (calculer avec des racines carrées)
Exercice n°22 page 59
Exercice n°24 page 60
Exercice n°36, 38 page 61

3. Equations du type « $x^2 = a$ » :

Propriété :
Soit a est un nombre positif.
L'équation **$x^2 = a$** admet les **deux solutions** **$\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$**.

Démonstration :
On suppose que a>0.
On résout l'équation :
$x^2 = a$
$x^2 - a = 0$
$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$
$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$ d'après une identité remarquable
Cela signifie que :
$x + \sqrt{a} = 0$ ou $x - \sqrt{a} = 0$
$x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$
Les solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple de rédaction:
Résoudre l'équation $x^2 = 16$:
$x^2 = 16$
Cela signifie que :
$x = \sqrt{16}$ ou $x = -\sqrt{16}$
$x = 4$ ou $x = -4$
L'équation admet deux solutions 4 et – 4.

Remarques :
L'équation « $x^2 = 0$ » n'admet qu'une seule solution car $\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$.
Si a est négatif, l'équation « $x^2 = a$ » n'a pas de solution puisqu'un carré est toujours positif.

Fiche 3 (Equation du type $x^2=a$)
Fiche 4 (Racines carrées et calcul littéral)
Exercices n°56, 60 page 63